

 MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin	 
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a X-a

Barem de evaluare și notare:

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1. Arătați că, dacă $a = \log_{45} 25$ și $b = \log_{15} 27$, , atunci $c = 3a + ab + 2b$ este număr natural.

(Supliment GM 10/2023)

Soluție:

$a = 2 \cdot \log_{45} 5 = \frac{2}{\log_5 9 \cdot 5} = \frac{2}{1 + 2 \cdot \log_5 3}$	2p
$b = 3 \cdot \log_{15} 3 = \frac{3}{1 + \log_3 5}$	2p
<p>Notăm $\log_5 3$ cu t și avem:</p> $a = \frac{2}{1 + 2t}, b = \frac{3}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{3t}{t + 1}, c = \frac{6}{1 + 2t} + \frac{6t}{(1 + t)(1 + 2t)} + \frac{6t}{t + 1} = 6$	3p

Problema 2. (a) Arătați că numărul $\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$ este rațional.

(b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x - 4} + \sqrt[3]{x + 4} = 2$.

(Concurs Viitori Olimpici.ro, 2022)

Soluție:

<p>Notăm $x = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$ și folosim egalitatea</p> $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ <p>ajungem la ecuația $x^3 = 18 + 3x$ și se demonstrează că unica soluție este $x = 3 \in \mathbb{Q}$</p>	4p
Se demonstrează că ecuația are soluție unică $x = 4$	3p

Problema 3. Se notează cu α o soluție complexă a ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

- (a) Determinați numărul natural p știind că α este o soluție și a ecuației $x^{76} - x^{96} - x^{17} + p = 0$.
- (b) Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\alpha^{4n} + \alpha^{2n} + 1 = 0$, atunci n nu este divizibil cu 3.

(Supliment GM 10/2023)

Soluție:

a) $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -1$	1p
$\alpha^{76} - \alpha^{96} - \alpha^{17} + p = -\alpha - 1 + \alpha^2 + p = p - 2 \Rightarrow p = 2$	3p
b) Dacă $n = 3p$ atunci: $\alpha^{2p} + \alpha^{6p} + 1 = 3$, absurd	3p

Problema 4. (a) Dați un exemplu de mulțimi $A, B \subset \mathbb{R}$ pentru care funcția

$f: A \rightarrow B, f(x) = x^2 - 6x + 5$ este injectivă, dar nu este surjectivă și un exemplu de mulțimi $C, D \subset \mathbb{R}$ pentru care funcția $g: C \rightarrow D, g(x) = x^2 - 6x + 5$ este surjectivă, dar nu este injectivă.

(b) Demonstrați că funcția $h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, h(n) = \log_{n+1} n$ este o funcție strict crescătoare.

(c) Calculați partea întreagă a numărului real $t = \log_3 2 + \log_4 3$.

(Supliment GM 11/2023)

Soluție:

a) Exemplu corect	4p
b) $h(n) < h(n+1) \Leftrightarrow \lg(n) \cdot \lg(n+2) < \lg^2(n+1)$. Într-adevăr: $\lg(n) \cdot \lg(n+2) < \left(\frac{\lg(n) + \lg(n+2)}{2} \right)^2 = \left(\lg(\sqrt{n^2 + 2n}) \right)^2 < \lg^2(n+1)$	2p
$[t] = 1$	1p